1. [PAU10J1Q6] Sigui $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de *x* i *y* perquè es compleixi que $A^2 = A$.

2. [PAU10J1Q6] Considereu la igualtat matricial $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

a) Comproveu si les matrius $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ compleixen o no la igualtat anterior.

b) En general, donades dues matrius qualssevol *A* i *B* quadrades del mateix ordre, expliqueu raonadament si hi ha alguna condició que hagin de complir perquè la igualtat de l'enunciat sigui certa.

3. [PAU10S2Q4] Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que compleixi la igualtat $A^2 - 5A = I^2$, on I^2 és la matriu identitat d'ordre 2.

b) Utilitzeu aquesta igualtat per a calcular la matriu inversa de A.

c) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, utilitzant la matriu inversa de A.

4. [PAU11J1Q2] Si tenim la matriu invertible *A* i l'equació matricial $X \cdot A + B = C$:

a) Aïlleu la matriu *X*.

b) Trobeu la matriu *X* quan $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. [PAU11S2Q1] Donada la matriu $m = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$.

a) Calculeu els valors del paràmetre K per als quals la matriu M no té inversa.

b) Per a k=0, calculeu M^{-1}.

6. [PAU11S2Q4] Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu A^2 i A^3.

b) Deduïu raonadament A^{101}.

7. [PAU12J3Q4] Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

a) Comproveu que es compleix la igualtat $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

b) És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades *A* i *B* del mateix ordre? Responeu raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar les matrius *A* i *B*.

8. [PAU12J1Q3] Sigui *A* una matriu quadrada d'ordre *n* de manera que $A^2 = O$, en què *O* és la matriu nul·la (formada completament per zeros).

a) Comproveu que $(A + I_n)^2 = 2A + I_n$.

b) Comproveu que les matrius $B = I_n - A$ i $C = A + I_n$ són l'una inversa de l'altra.

9. [PAU12J1Q5] Contesteu les preguntes següents:

a) Expliqueu raonadament si una matriu d'ordre 3 i una matriu d'ordre 2 poden tenir el mateix determinant.

b) Considereu les matrius següents: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$. Calculeu si és possible, el valor de p per a que el $detA = detB$.

10. [PAU12S4Q3] Determineu el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en funció del paràmetre k.

11. [PAU13J4Q3] Sigui $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ p & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

a) Què significa que la matriu *B* sigui la matriu inversa de *A*?
b) Trobeu el paràmetre *p* perquè la matriu inversa de *A* i la matriu transposada de *A* coincideixin.
Nota: No aproximeu les arrels mitjançant decimals; treballeu amb el radicals.

12. [PAU13J3Q2] Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$. Sigui *I* la matriu identitat d'ordre 2.

a) Trobeu el valor del paràmetre *a* perquè compleixi que $A^2 - 2A = I$.
b) Calculeu la matriu inversa de la matriu *A* quan $a = -2$.

13. [PAU14J3Q6] Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si *A* és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $A^2 = I$, on *I* és la matriu identitat, aleshores *A* és invertible i A^{-1}satisfà $(A^{-1})^2 = I$.
b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat $A^2 = I$.

14. [PAU14J4Q5] Responeu a les qüestions següents:

a) Si *A* i *B* són dues matrius quadrades d'ordre *n*, demostreu que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \leftrightarrow AB = BA$.
b) Si $M_1 i\ M_2$ són dues matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in R$, comproveu que el producte $M_1 \cdot M_2$ també té la mateixa forma i que $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$.

15. [PAU14S5Q6] Considereu l'equació matricial $X \cdot A = B$, en què $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Per quins valors del paràmetre *a* l'equació matricial té una única solució?
b) Trobeu la matriu *X* que satisfà l'equació matricial quan $a = 3$.

16. [PAU15J2Q5] Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu la matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisfà $A^2 - A = I$, en què *I* és la matriu identitat.
b) Calculeu A^{-1} i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu A^{-1} a partir de la igualtat $A^2 - A = I$.

17. [PAU15J4Q5] Sigui *A* una matriu quadrada que compleix $A^3 = I$, en què *I* és la matriu identitat.

a) Demostreu que la matriu A té inversa i que $A^{-1} = A^2$.
b) En el cas de $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calculeu si hi ha cap valor del paràmetre *a* per al qual $A^3 = I$.

18. [PAU15S5Q1] Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$.
a) Determineu per a quins valors de a existeix la inversa de A.
b) Calculeu la inversa de A per a a=0.

19. [PAU16J3Q4] Responeu a les qüestions següents:
a) Calculeu totes les matrius de forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfan la igualtat $A^2 + A = 2I$, en què I és la matriu identitat.
b) Justifiqueu que si A és una quadrada que compleix la igualtat $A^2 + A = 2I$, aleshores A és invertible, i calculeu l'expressió de A^{-1} en funció de les matrius *A i I.*

20. [PAU16J5Q4] Sigui A una matriu quadrada d'ordre *n* que satisfà la igualtat $A(A - I) = I$, en què I és la matriu identitat.
a) Justifiqueu que la matriu A és invertible i que de $A^{-1} = (A - I)$.
b) Calculeu el valor de *a* que fa que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ compleixi la igualtat $A(A - I) = I$. Calculeu A^{-1} i comproveu que es correspon amb la matriu calculada a partir del resultat de l'apartat anterior.

21. [PAU16S1Q5] Responeu a les qüestions següents:
a) Trobeu la única matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que satisfà que $A^2 = A$, i comproveu que $A \ i \ A - I$ no són invertibles.
b) Justifiqueu raonadament que si A és una matriu quadrada d'ordre *n* diferent de la matriu nul·la, 0, i de la matriu identitat, I, i satisfà la igualtat $A^2 = A$, aleshores les matrius $A \ i \ A - I$ no són invertibles.

22. [PAU17J1Q5] Considereu les matrius quadrades d'ordre 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2 + 1 & x \end{pmatrix}$, amb x i y nombres reals.
a) Comproveu que la matriu M és sempre invertible, independentment dels valora de x i de y.
b) Per a $x = 1 \ i \ y = -1$, calculeu M^{-1}.

23. [PAU17S2Q2] Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $i \ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.
a) Comproveu que satisfan la igualtat $A^2 - \frac{1}{2} A \cdot B = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 3.
b) Fent servir la igualtat anterior, trobeu la inversa de A.

24. [PAU17J5Q6] Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 3, calculeu per a quins valors de K la matriu $A + kI$ té inversa. Trobeu, si existeix, la matriu inversa de $A - 2I$.
b) Calculeu la matriu X que satisfà l'equació $X \cdot A + A^t = 2X$, en què A^t és la matriu transposada de A.

25. [PAU18J1Q1] Siguin les matrius $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
a) Calculeu M · N i comproveu que la matriu resultant no és invertible.
b) Trobeu els valors de t per als quals la matriu N · M és invertible.

26. [PAU18S3Q4] Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en què α és un paràmetre real.
a) Hi ha algun valor de $\alpha \in R$ tal que A no tingui inversa per a aquest valor?
b) Calculeu la matriu inversa de A^2 per a $\alpha = 0$.

27. [PAU19J1Q5] Sigui la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ en què a és un paràmetre real.
a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $M^2 - M - 2I = 0$, en què I és la matriu identitat i 0 és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.
b) Fent serviu la igualtat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la matriu inversa de la matriu M i, a continuació, calculeu la inversa de M per al cas $a = \sqrt{2}$.

28. [PAU20J1Q5] Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$
a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
b) Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu la seva matriu inversa.

29. [PAU20J3Q1] Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.
   a) Determineu el rang de la matriu A en funció del paràmetre a.
   b) Comproveu que $\det(A^2 + A) = 0$.

30. [PAU20S4Q4] Sigui $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.
   a) Determineu el rang de la matriu A en funció del paràmetre a.
   b) Comproveu que per a $a = 4$ la matriu A és invertible i que es verifica que $A^{-1} = A^2$.

31. [PAU21J2Q5]
   a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial $A^2X = A - 3I$ en què I és la matriu identitat.
   b) Una matriu quadrada M satisfà que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, en què I és la matriu identitat. Justifiqueu que M és invertible i expresseu la inversa de M en funció de les matrius M i I.

32. [PAU 21J2Q1] Considereu les matriu A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.
    a. Raoneu que la matriu B és invertible i després calculeu B^{-1}.
    b. Calculeu la matriu X que satisfà la igualtat A+B·X=C·A

33. [PAU 21S1Q5] Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$
    a. Trobeu per a quins valors de a la matriu A és invertible.
    b. Comproveu que, per al cas a=3, la matriu A és invertible i resoleu l'equació matricial AX=B–3I, en què B és la matriu $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

34. [PAU 22JS2Q5] Sigui la matriu $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$
    a. Calculeu les matrius X tals que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
    b. Determineu els valors de a, b i c perquè la matriu inversa de X sigui
    $X^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

35. [PAU 22JS5Q1] Siguen les matriu C=$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $i\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
    a. Comproveu que $\mathbf{C}^3=\mathbf{I}_2$ en què I_2 és la matriu identitat d'ordre 2, i deduïu que la matriu C és invertible i que $C^{-1}=C^2$. Calculeu C^{2022}.
    b. Resoleu l'equació matricial C · X= A – $2I_2$

36. [PAU 22SS3Q3] Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre a.
    a. Calculeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu A és invertible.
    b. Per al cas a=3, resoleu l'equació A·X=B–3I, en què $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

37. [PAU 23JS1Q2] Considereu les dues matrius següents: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ $i\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
    a. Calculeu les matrius A · B i B · A.
    b. Siguin C i D dues matrius quadrades del mateix ordre que satisfan C · D=C i D · C=D. Comproveu que les dues matrius, C i D, són idempotents.
    Nota: Una matriu quadrada s'anomena idempotent si coincideix amb el seu quadrat.

38. [PAU 23JS5Q5] Considereu la família S de matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, en què a, b∈ℝ.
    a. Calculeu: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

b. Trobeu totes les matrius de la família S, és a dir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, que verifiquin la igualtat A^2=I, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

39. [PAU 23SS2Q1] Siguin $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, i la matriu identitat d'ordre dos $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Comproveu que $(A – 2I)^2$= 3I.
b. Utilitzant la igualtat de l'apartat anterior, trobeu la matriu inversa de la matriu A en funció de les matrius A i I, i comproveu que coincideix amb la matriu B.
c. Calculeu la matriu X que satisfà la igualtat A · X=B.

40. [PAU 24JS5Q2] Considereu les matrius $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ i $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Decidiu si la matriu P és invertible i, en cas de ser-ho, calculeu la seva inversa. Expliqueu detalladament el procediment seguit.
b. Calculeu una matriu X de 3 files i 3 columnes que compleixi P X + Q = 2R.